Formulaire d'électrostatique

Champ électrostatique

- Créé par une particule:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Créé par n charges ponctuelles:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$$

Créé par une distribution continue:

$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

Distributions de charges :

linéique : $\mathrm{dq} = \lambda\ \mathrm{dl}$

surfacique : $\mathrm{dq} = \sigma\ \mathrm{d}^2\mathrm{S}$

volumique : $\mathrm{dq} = \rho\ \mathrm{d}^3V$

Potentiel électrostatique

Créé par une charge ponctuelle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Créé par n charges ponctuelles

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Créé par une distribution continue

$$V(M) = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + V_0$$

Conducteurs en équilibre

- Champ à proximité (Th de Coulomb) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Capacité d'un conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad \boxed{Q = \iint_{\text{Surface}}\sigma\ \mathrm{d}^2\mathrm{S}}$$

Coefficients d'influence (n conducteurs) :

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j \quad \text{avec} \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{où} \quad \boxed{U = V_1 - V_2}$$

Propriétés fondamentales

Flux (Th. de Gauss) :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Circulation :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad \left(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V\right)$$

Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle :

$$W_e = qV$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

D'un système de n conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Q_iV_i$$

Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur en équilibre

$$\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \sigma\overrightarrow{E_{ext}}\,d^2S = \iint_S Pd^2S\vec{n}$$

Expression via l'énergie (condensateur)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ W_e\left(= \frac{U^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\ C\right)$$

Dipôle électrostatique

Moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Potentiel à grande distance :

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

Energie électrostatique

$$W_e = -\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}$$

Force et moment électrostatiques

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}$$

Electrocinétique

Densité de courant

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}$$

Courant

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_{Section} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

Loi d 'Ohm locale

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (γ conductivité, $\eta = 1/\gamma$ résistivité)

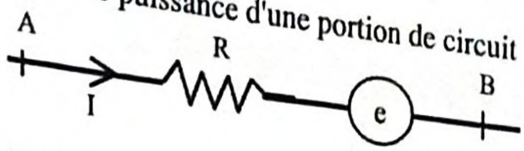
Résistance d'un conducteur

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\iint_S \gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2S}}$$

Force électromotrice (fém) entre A et B

$$e = \int_A^B \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \vec{dl}$$

Bilan de puissance d'une portion de circuit



$U = V_A - V_B = RI - e$

$P = UI$, puissance disponible entre A et B

$P_J = RI^2$, puissance dissipée par effet Joule

$P = eI$, puissance fournie (générateur si $e > 0$)
ou consommée (récepteur si $e < 0$)

Lois de conservation

- Loi des nœuds

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}$$

- Loi des mailles

$$\sum_{k=1}^{n} (R_k I_k - e_k) = 0$$

I.1.2- Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravite » une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées **protons**. Cependant, le noyau atomique ne pourrait rester stable s'il n'était composé que de protons : ceux-ci ont en effet tendance à se repousser mutuellement. Il existe donc une autre sorte de particules, les **neutrons** (découverts en 1932 par Chadwick) portant une charge électrique nulle. Les particules constituant le noyau atomique sont appelées les **nucléons**.

(protons + neutrons = nucléons)

Dans le tableau de Mendeleev tout élément chimique X est représenté par la notation ${}^{A}_{Z}X$. Le nombre A est appelé le nombre de masse : c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre $\boxed{Z}$ est appelé le nombre atomique et est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc Q=+Ze, le cortège électronique possédant alors une charge totale Q=-Ze, assurant ainsi la neutralité électrique d'un atome.

Exemple : le Carbone ${}^{12}_{6}C$ possède 12 nucléons, dont 6 protons (donc 6 électrons) et 6 neutrons, le Cuivre ${}^{63}_{29}Cu$ 63 nucléons dont 29 protons (donc 29 électrons) et 34 neutrons. L'atome de cuivre existe aussi sous la forme ${}^{64}_{29}Cu$, c'est à dire avec 35 neutrons au lieu de 34 : c'est ce qu'on appelle un **isotope**.

isotope : same Z but A ≠

Valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :

Electron :	$q_e = -e = -1.602\ 10^{-19}$ C	$m_e = 9.109\ 10^{-31}$ kg
Proton :	$q_p = +e = 1.602\ 10^{-19}$ C	$m_p = 1.672\ 10^{-27}$ kg
Neutron :	$q_n = 0$ C	$m_n = 1.674\ 10^{-27}$ kg

Comme on peut le remarquer, même une charge de l'ordre du Coulomb (ce qui est énorme), correspondant à environ 10^{18} électrons, ne produit qu'un accroissement de poids de l'ordre de 10^{-12} kg : c'est effectivement imperceptible.

Si les électrons sont bien des particules quasi-ponctuelles, les neutrons et les protons en revanche ont une taille non nulle (inférieure à 10^{-15} m). Il s'avère qu'ils sont eux-mêmes constitués de **quarks**, qui sont aujourd'hui, avec les électrons, les vraies briques élémentaires de la matière. Les protons ainsi que les neutrons forment ainsi une classe de particules appelée les **baryons**.

A l'heure actuelle, l'univers (ou plutôt l'ensemble reconnu de ses manifestations) est descriptible à l'aide de quatre forces fondamentales :

1) La force nucléaire faible, responsable de la cohésion des baryons (quarks-quarks);
2) La force nucléaire forte, responsable de la cohésion du noyau (protons-neutrons) ;
3) La force électromagnétique, responsable de la cohésion de l'atome (électrons-nucléons) ;
4) La force gravitationnelle, responsable de la structure à grande échelle de l'univers (cohésion des corps astrophysiques, cohésion des systèmes planétaires, des galaxies, des amas galactiques, moteur de la cosmologie).

I.1.3- Les divers états de la matière

La cohésion de la matière est due à l'interaction entre ses constituants, interaction mettant en jeu une énergie de liaison. Or, chaque constituant (atome ou molécule) possède lui-même de l'énergie cinétique liée à sa température (énergie d'agitation thermique). La rigidité d'un état particulier de la matière dépend donc de l'importance relative de ces deux énergies (cinétique et liaison).

Si l'on prend un gaz constitué d'atomes (ou de molécules) neutres, alors l'interaction entre deux constituants est assez faible : elle ne se produit que lorsqu'ils sont assez proches pour qu'il y ait répulsion entre les électrons périphériques. Ainsi, chaque atome est relativement libre de se déplacer dans l'espace, au gré des « collisions » avec d'autres atomes.

Si l'on refroidit ce gaz, certaines liaisons électrostatiques qui étaient négligeables auparavant peuvent devenir opérantes et l'on obtient alors un liquide. Si l'on chauffe ce gaz, de l'énergie est fournie à ses constituants, les molécules se brisent et, si l'on continue à chauffer, on peut même libérer un ou plusieurs électrons périphériques des atomes, produisant ainsi un gaz d'ions ou plasma.

Dans un solide au contraire, les liaisons entre chaque atome sont beaucoup plus fortes et les atomes ne bougent quasiment pas, formant un cristal. La force de cette cohésion dépend beaucoup d'un solide à l'autre. Ainsi, elle est très puissante si les atomes mettent en commun leur cortège électronique (liaison covalente comme pour le diamant et liaison métallique, comme pour le Cuivre) et beaucoup plus faible si les cortèges électroniques de chaque atome restent intouchés (liaison ionique, comme pour le sel).

Enfin, la matière molle (caoutchouc, plastiques, textiles, mousses) possède une hiérarchie du point de vue de sa cohésion : elle est constituée d'éléments « solides » (macromolécules liées par des liaisons covalentes) interagissant entre eux par des liaisons ioniques (électrostatiques).

I.1.4- Matériaux isolants et matériaux conducteurs

Un matériau est ainsi constitué d'un grand nombre de charges électriques, mais celles-ci sont toutes compensées (même nombre d'électrons et de protons). Aux températures usuelles, la matière est électriquement neutre. En conséquence, lorsque des effets d'électricité statique se produisent, cela signifie qu'il y a eu un déplacement de charges, d'un matériau vers un autre : c'est ce que l'on appelle l'électrisation d'un corps. Ce sont ces charges, en excès ou en manque, en tout cas non compensées, qui sont responsables des effets électriques sur ce corps (ex : baguette frottée).

Un matériau est dit **conducteur parfait** si, lorsqu'il devient électrisé, les porteurs de charge non compensés peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau.

Ce sera un **isolant (ou diélectrique) parfait** si les porteurs de charge non compensés ne peuvent se déplacer librement et restent localisés à l'endroit où ils ont été déposés.

Un matériau quelconque se situe évidemment quelque part entre ces deux états extrêmes. Cette propriété de conduction de l'électricité sera abordée plus loin, dans le Chapitre sur l'électrocinétique.

Refaisons une expérience d'électricité statique : prenons une baguette métallique par la main et frottons-la avec un chiffon. Cela ne marchera pas, la baguette ne sera pas électrisée. Pourquoi ? Etant nous-mêmes d'assez bons conducteurs, les charges électriques arrachées au chiffon et transférées à la baguette sont ensuite transférées sur nous et l'on ne verra plus d'effet électrique particulier au niveau de la baguette. Pour que cette expérience marche, il est nécessaire d'isoler électriquement la baguette (en la tenant avec un matériau diélectrique).

I.2- Force et champ électrostatiques

I.2.1- La force de Coulomb

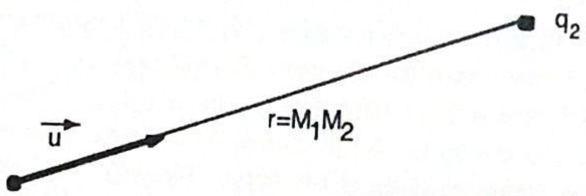
Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2:

1) La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
2) Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;
3) Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

L'expression mathématique moderne de la force de Coulomb et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}}$$

où la constante multiplicative vaut $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\,10^9$ SI ($\mathrm{N\,m^2C^{-2}}$). La constante ε_0 joue un rôle particulier et est appelée **la permittivité électrique du vide** (unités : Farad/m).



Remarques :

1) Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
2) Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
3) A part la valeur numérique de la constante K, cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (loi de Newton). Il ne sera donc pas étonnant de trouver des similitudes entre ces deux lois.

Ordres de grandeur

- Quel est le rapport entre la force d'attraction gravitationnelle et la répulsion coulombienne entre deux électrons ?

$q_1 \cdot q_2$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{Gm_e^2} \sim 4\,10^{42}$$

$F_e \gg F_g$

La force électrostatique apparaît donc dominante vis-à-vis de l'attraction gravitationnelle. Cela implique donc que tous les corps célestes sont exactement électriquement neutres.

- Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de 1 C situées à 1 km ?

$$\frac{Fe}{g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(10^3\right)^2}\frac{1}{10} \sim 10^3 \text{ kg}$$

C'est une force équivalente au poids exercé par une tonne !

I.2.2- Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

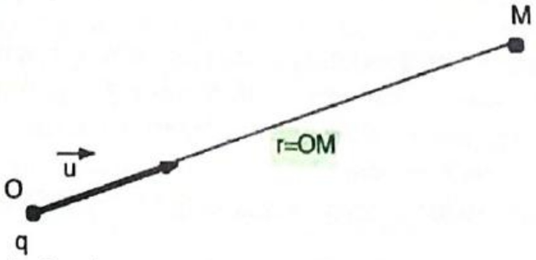
Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb ci-dessus. Mais comme pour l'attraction gravitationnelle, on peut la mettre sous une forme plus intéressante,

$$\vec{F}_{1/2} = q_2\vec{E_1}(M)$$

où

$$\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (ici, c'est sa charge q_2, pour la gravité c'est sa masse), de ce qui ne dépend que d'une source extérieure, ici le vecteur $\vec{E_1}(M)$.



Définition : *Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel*

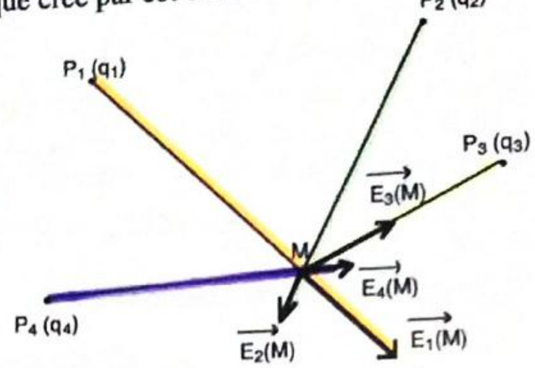
$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

appelé champ électrostatique. L'unité est le Volt/mètre (symbole V/m).

Cette façon de procéder découle de (ou implique) une nouvelle vision de l'espace : les particules chargées se déplacent maintenant dans un espace où existe (se trouve défini) un champ vectoriel. Elles subissent alors une force en fonction de la valeur du champ au lieu où elle se trouve.

I.2.3- Champ créé par un ensemble de charges

On considère maintenant n particules de charges électriques q_i, situées en des points P_i : quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M ?



La réponse n'est absolument pas évidente car l'on pourrait penser que la présence du champ créé par des particules voisines modifie celui créé par une particule. En fait, il n'en est rien et l'expérience montre que la force totale subie par une charge q située en M est simplement la superposition des forces élémentaires,

La partie variable

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q\vec{E}(M)$$

où $r_i = P_iM$, $\overrightarrow{P_iM} = P_iM\,\vec{u_i}$ et il en résulte donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}}$$

est donc le champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges.

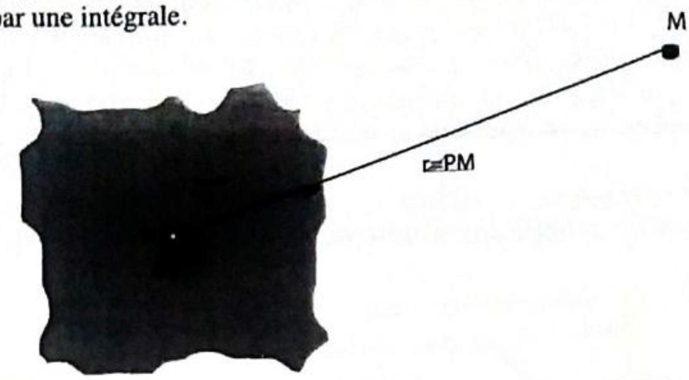
Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le **principe de superposition** (comme tout principe, il n'est pas démontré).

En pratique, cette expression est rarement utilisable puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules. C'est simplement dû au fait que l'on ne considère que des échelles spatiales tres grandes devant les distances inter-particulaires, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges.

Soit P un point quelconque d'un conducteur et dq(P) la charge élémentaire contenue en ce point. Le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int_{distribution} \overrightarrow{dE}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}}$$

Mathématiquement, tout se passe donc comme une charge ponctuelle dq était située en un point P de la distribution, créant au point M un champ électrostatique $\overrightarrow{dE}(M)$, avec $r = PM$ et $\overrightarrow{PM} = PM\,\vec{u}$. Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.



On définit $\rho = \dfrac{dq}{dv}$ comme étant la **densité volumique de charges** (unités : Cm^{-3}). Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc

$$\vec{E}(M) = \iiint_{Volume} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho}{r^2} \vec{u}\, dv$$

Lorsque l'une des dimensions de la distribution de charges est beaucoup plus petite que les deux autres (ex : un plan ou une sphère creuse), on peut généralement faire une intégration sur cette dimension. On définit alors la **densité surfacique de charges** $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ (unités : Cm^{-2}), produisant un champ total

$$\vec{E}(M) = \iint_{Surface} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} \vec{u}\, dS$$

Enfin, si deux des dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (ex : un fil), on peut définir une **densité linéique de charges** $\lambda = \dfrac{dq}{dl}$ (unités : Cm^{-1}), associé au champ

$$\vec{E}(M) = \int_{Longueur} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \vec{u}\, dl$$

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces trois expressions dépend de la géométrie de la distribution de charges considérée. L'expression générale à retenir est celle qui est encadrée.

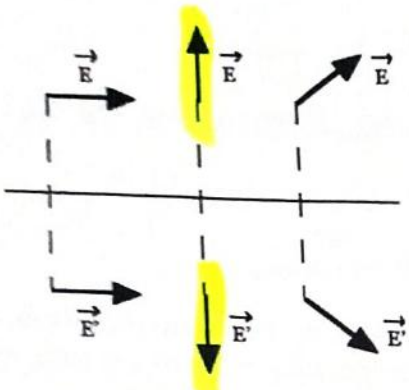
I.2.4- Propriétés de symétrie du champ électrostatique

Principe de Curie : « *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.* »

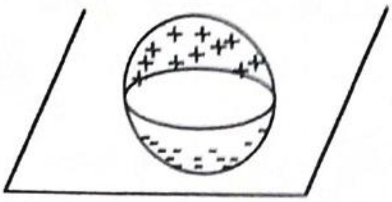
Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations.
Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

Transformations géométriques d'un vecteur
Lors d'une transformation géométrique d'un vecteur quelconque, celui-ci est transformé en son symétrique.



Transformation d'un vecteur par symétrie par rapport à un plan


Exemple d'un plan d'antisymétrie

Soit $\vec{A'}(M')$ le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan S à partir de $\vec{A}(M)$. D'après la figure ci-dessus, on voit que

1. $\vec{A'}(M') = \vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que S ;
2. $\vec{A'}(M') = -\vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à S.

Ces deux règles de transformation vont nous permettre de déterminer des règles de symétrie utiles.

Règles de symétrie

- Invariance par translation : si S est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, les effets ne dépendent pas de z.
- Symétrie axiale : si S est invariant dans toute rotation θ autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) ne dépendent pas de θ.
- Symétrie cylindrique : si S est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) ne dépendent que de la distance à l'axe ρ.
- Symétrie sphérique : si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r,θ,φ) ne dépendent que de la distance au centre r.
- Plan de symétrie $\prod$: si S admet un plan de symétrie $\prod$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.
- Plan d'antisymétrie $\prod'$: si, par symétrie par rapport à un plan $\prod'$, S est transformé en $-S$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

Remarque importante
Nous verrons en magnétostatique qu'il convient de faire la distinction entre vrais vecteurs (ou vecteurs axiaux) et pseudo-vecteurs (ou vecteurs polaires), ces derniers étant définis à partir du produit vectoriel de deux vecteurs vrais. Ainsi, le champ électrostatique est un vrai vecteur tandis que le champ magnétique est un pseudo-vecteur. Tout ce qui a été dit ci-dessus n'est valable que pour les vrais vecteurs.

Quelques Compléments :
1) Pourquoi un vrai vecteur $\vec{A}(x_1,x_2,x_3)$ est indépendant de la variable x_1 si le système S n'en dépend pas ?
Soit un point $M(x_1,x_2,x_3)$ dont les coordonnées sont exprimées dans un système quelconque.
Soit un point $M'(x_1+dx_1,x_2,x_3)$ lui étant infiniment proche. On a alors

$$\vec{A}(M') = \begin{cases} A_1(M') = A_1(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_1(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1 \\ A_2(M') = A_2(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_2(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 \\ A_3(M') = A_3(x_1+dx_1,x_2,x_3) \approx A_3(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1}dx_1 \end{cases}$$

c'est à dire, de façon plus compacte $\vec{A}(M') = \vec{A}(M) + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x_1}dx_1$. Si le système physique S reste invariant lors d'un changement de M en M', alors (Principe de Curie) $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$. On a donc $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \vec{0}$ en tout point M, ce qui signifie que $\vec{A}(x_2,x_3)$ ne dépend pas de x_1. On peut suivre le même raisonnement pour chacune des autres coordonnées.

2) Pourquoi un vrai vecteur appartient nécessairement à un plan $\prod$ de symétrie ?
Quel que soit M de S, soit M' son symétrique par rapport à $\prod$. Ce plan étant un plan de symétrie, cela signifie que f(M)=f(M') pour toute fonction de M. Ceci est en particulier vrai pour chaque composante $A_i(M) = A_i(M')$ du vecteur $\vec{A}(M)$. On a donc $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$ ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que $\prod$.

3) Pourquoi un vrai vecteur est nécessairement perpendiculaire à un plan $\prod$' d'antisymétrie ?
Ce plan étant un plan d'antisymétrie, on a f(M')=-f(M) pour toute fonction de M. Ceci étant vrai pour chaque composante du vecteur $\vec{A}(M)$, on a donc $A_i(M') = -A_i(M)$, ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à $\prod$'.

الجامعي
التشغيل الذاتي
INDH

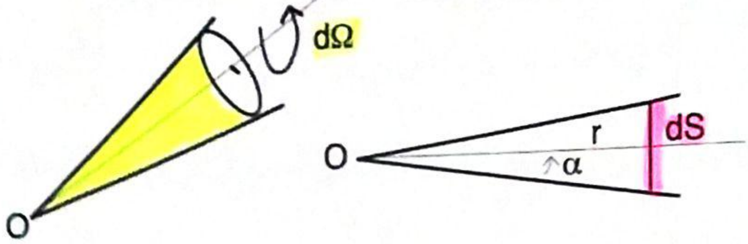
3 DH

Chapitre II- Lois fondamentales de l'électrostatique

II.1- Flux du champ électrostatique

II.1.1- Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.



Définition : l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

$$\text{Sr} \rightarrow \boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}$$

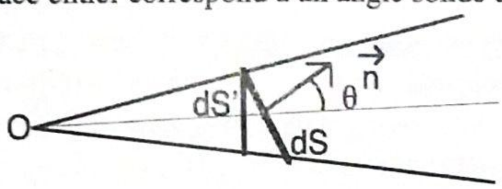
Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

ds

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $\boxed{d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec α=π/2 (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π (α=π).



D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$. L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\, \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

II.1.2- Théorème de Gauss

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

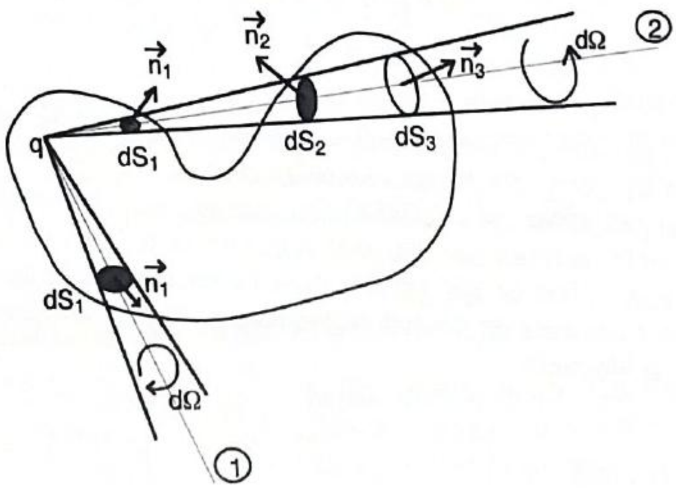
$$\boxed{d\Phi = \vec{E}\cdot\vec{dS} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif.

A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$\boxed{d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega}$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que dΩ>0, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en $1/r^2$: on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.



Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? Prenons le cas illustré dans la figure ci-dess us. On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur $\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur). Pour le rayon 1, on a simplement

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

mais le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux

$$
\begin{aligned}
d\Phi_2 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n_1}}{r_1^2}dS_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_2}}{r_2^2}dS_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_3}}{r_3^2}dS_3\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(d\Omega \quad - \quad d\Omega \quad + \quad d\Omega) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega
\end{aligned}
$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée va toujours traverser S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Théorème de Gauss : *le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\varepsilon_0$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Remarques :

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell).

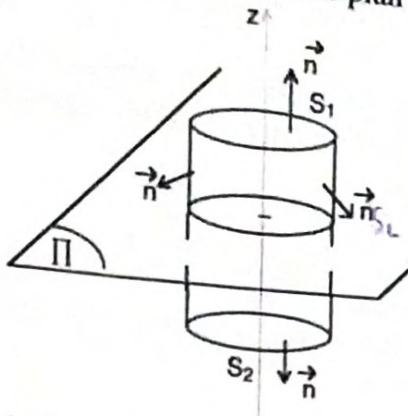
II.1.3- Exemples d'applications

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini $\prod$ portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface. Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$.
Tous les plans perpendiculaires au plan infini $\prod$ sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à $\prod$. Si ce plan est engendré par

les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{E} = E_z(x,y,z)\,\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon x et y nous fournit $\vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$. Le plan $\prod$ est lui-même plan de symétrie, donc E(z) est impaire.



Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

$$= E(z)S - E(-z)S + 0 = 2ES$$

$$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_S \sigma dS = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

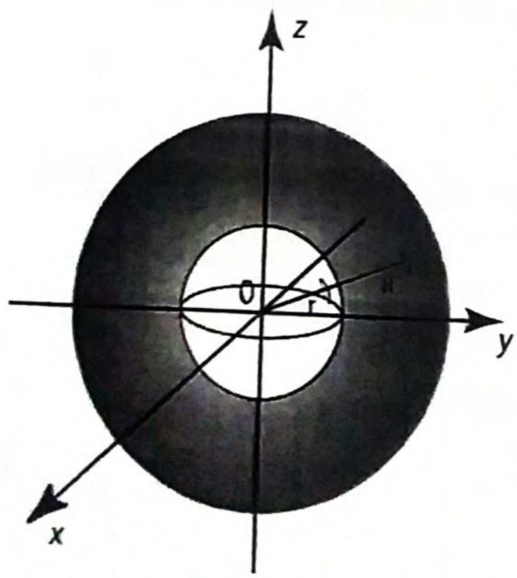
Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Remarques :

1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini .
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

Champ créé par une boule uniformément chargée



On considère une boule (sphère pleine) de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$.

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss nous fournit

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2$$

$$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oiiint_V \rho\, dV$$

Lorsque r<R, on obtient un champ

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Lorsque r>R, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la boule. Mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en r=R, ce qui fournit donc un champ

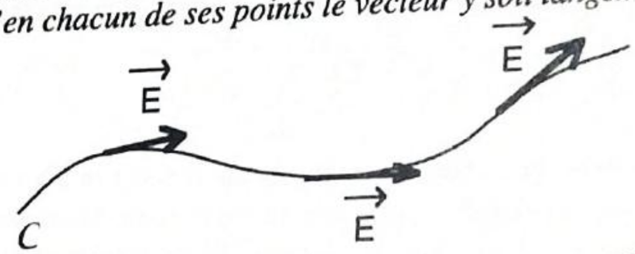
$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

où Q est la charge totale portée par la boule. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située en O.

II.1.4- Lignes de champ

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : *Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.*



Considérons un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ $\vec{E}$ soit en tout point de C parallèle à $\vec{dl}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{dl} = d\rho\,\vec{u_\rho} + \rho d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + rd\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\vec{u_\varphi}$ et on a

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour <u>fermé</u> C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E} \perp \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre coté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un *tube de flux*.

II.2- Circulation du champ électrostatique

II.2.2- Notion de potentiel électrostatique

On va démontrer ci-dessous qu'il existe un scalaire V, appelé potentiel électrostatique, définit dans tout l'espace et qui permet de reconstruire le champ électrostatique $\vec{E}$. Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique. Mais tout d'abord, est-il possible d'obtenir un champ de vecteurs à partir d'un champ scalaire ?

Prenons un scalaire V(M) défini en tout point M de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est alors fourni par la différentielle totale

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{grad}\, V$, est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dOM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques on trouve respectivement

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Un déplacement $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'}$ le long d'une courbe (ou surface) définie par V=Constante correspond à dV=0, ce qui signifie que $\overrightarrow{grad}\,V$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Par ailleurs, plus les composantes du gradient sont élevées et plus il y a une variation rapide de V. Or, c'est bien ce qui semble se produire, par exemple, au voisinage d'une charge électrique q: les lignes de champ électrostatique sont des droites qui convergent (q<0) ou divergent (q>0) toutes vers la charge. Il est donc tentant d'associer le champ $\vec{E}$ (vecteur) au gradient d'une fonction scalaire V.

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en $1/r^2$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus « fondamentale » puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

Définition : le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par

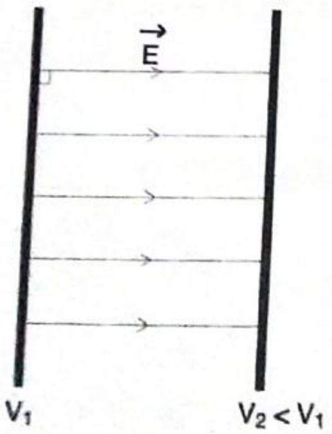
$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V}$$

Remarques :

1. Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique (cf chapitre IV).
2. La conséquence de cette définition du potentiel est $dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque.
3. *Les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles.*

***Définition** : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est*

$$\boxed{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)}$$



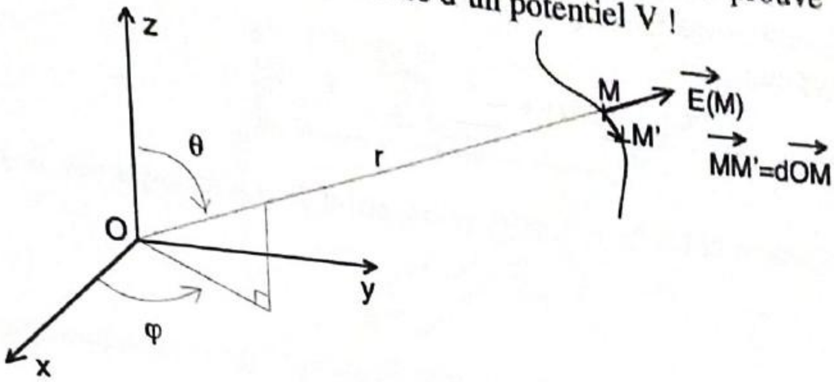
Remarques :

1. Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi.
2. La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique.
3. D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $\vec{E}\cdot\vec{dl} > 0$ on a V(A)>V(B). *Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.*

EX2

II.2.2- Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous venons de voir l'interprétation géométrique du gradient d'une fonction scalaire et le lien avec la notion de circulation. Mais nous n'avons pas encore prouvé que le champ électrostatique pouvait effectivement se déduire d'un potentiel V !



Considérons donc une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}$. Le potentiel électrostatique est alors donné par

$$dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant r,

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0}$$

Remarques :

1. La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini)
2. L'unité du potentiel est le *Volt* . En unités du système international (SI) le Volt vaut
$$[V] = [E\,L] = M\,L^2\,T^{-3}\,I^{-1}$$
3. Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur (voir Chapitre III). Il y a en fait une analogie formelle entre d'un coté, potentiel V et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge Q et chaleur déposée dans ce corps.

II.2.3- Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de n charges ponctuelles q_i distribuées dans tout l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$ est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i$ créés par chaque charge q_i. On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0}$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M.

Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges q_i, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégrale $\sum_i q_i(P_i) \rightarrow \int dq(P)$ où P est un point courant autour duquel se trouve une charge « élémentaire » dq. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} + V_0}$$

où r=PM est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges.

Remarques :

1. Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique σ et volumique ρ, on obtient respectivement

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, dl}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\, d\upsilon}{r} + V_0$$

2. Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour $r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

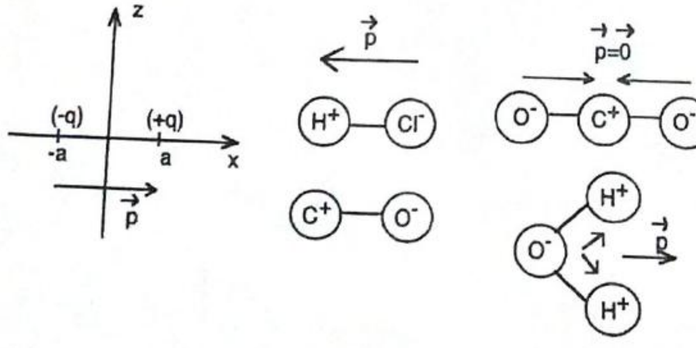
II.3- Le dipôle électrostatique

II.3.1- Potentiel électrostatique créé par deux charges électriques

Il existe dans la nature des systèmes globalement électriquement neutres mais dont le centre de gravité des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives. Un tel système peut souvent être décrit (on dit modélisé) en première approximation par deux charges électriques ponctuelles, +q et –q situées à une distance d=2a l'une de l'autre. On appelle un tel système de charges un dipôle électrostatique.

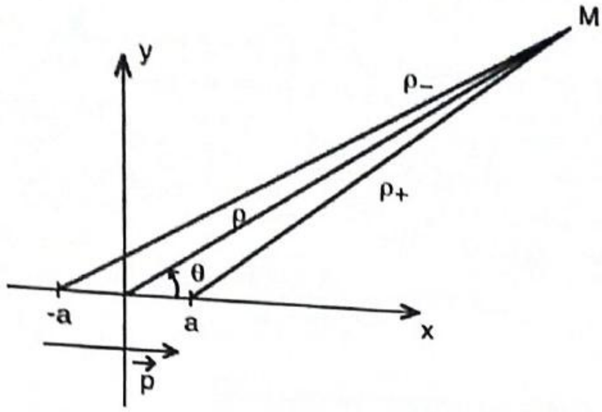
Définition : *on appelle moment dipolaire électrique la grandeur*

$$\boxed{\vec{p} = qd\,\vec{i} = 2aq\,\vec{i}}$$



Les molécules telles que HCL,CO,H20,CO2 constituent des exemples de dipôles électrostatiques.

Connaître l'effet (la force) électrostatique que ces deux charges créent autour d'elles nécessite de calculer le champ électrostatique. Habituellement, nous aurions appliqué le principe de superposition et calculé ainsi la somme vectorielle des deux champs. L'avantage du potentiel est de permettre d'arriver au même résultat sans se fatiguer.



D'après la section précédente, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (ρ,θ) est simplement

$$V(M) = V_{+q}(M) \quad + \quad V_{-q}(M)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_+\rho_-}$$

où l'on a choisi arbitrairement V=0 à l'infini. Or, $\overrightarrow{\rho_\pm} = \vec{\rho} \mp a\vec{i}$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est à dire à des distances ρ>>a, on peut faire un développement limité de V. Au premier ordre en a /ρ on obtient

$$\rho_\pm = \left(\overrightarrow{\rho_\pm}\cdot\overrightarrow{\rho_\pm}\right)^{1/2} \approx \rho\left(1 \mp 2\frac{a}{\rho^2}\vec{\rho}\cdot\vec{i}\right)^{1/2} \approx \rho \mp a\cos\theta$$

c'est à dire $\rho_- - \rho_+ \approx 2a\cos\theta$ et $\rho_-\rho_+ \approx \rho^2$. Le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrostatique vaut donc

$$\boxed{V(M) = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2} = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2}}$$

II.3.2- Champ créé à grande distance

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ en coordonnées cylindriques. On obtient ainsi

$$\vec{E} = \begin{cases} E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^3} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Par construction, le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte (ici l'axe Ox) : le potentiel ainsi que le champ électrostatiques possèdent donc également cette symétrie. Cela va nous aider à visualiser les lignes de champ ainsi que les équipotentielles. Par exemple, le plan médiateur défini par $\theta = \pi/2$ (x=0) est une surface équipotentielle V=0. Les équipotentielles sont des surfaces (dans l'espace ; dans le plan ce sont des courbes) définies par $V = \text{Constante} = V_0$, c'est à dire

$$\rho = \sqrt{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0}}$$

L'équation des lignes de champ est obtenue en résolvant

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}$$

$$\rho = K\sin^2\theta$$

où K est une constante d'intégration dont la valeur (arbitraire) définie la ligne de champ.

II.3.3- *Complément* : développements multipolaires

Lorsqu'on a affaire à une distribution de charges électriques et qu'on ne s'intéresse qu'au champ créé à une distance grande devant les dimensions de cette distribution, on peut également utiliser une méthode de calcul approché du potentiel. Le degré de validité de ce calcul dépend directement de l'ordre du développement limité utilisé : plus on va à un ordre élevé et meilleure sera notre approximation. Par exemple, l'expression du dipôle ci-dessus n'est valable que pour $\rho \gg a$, mais lorsque ρ tend vers a, il faut prendre en compte les ordres supérieurs, les termes dits multipolaires.

Prenons le cas d'une distribution de charges ponctuelles q_i situées en $\vec{r_i} = \overrightarrow{OP_i}$. Le potentiel créé en un point M repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (coordonnées sphériques) est

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

En supposant $r \gg r_i$, on peut montrer facilement que ce potentiel admet le développement suivant

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{r} + \frac{q_i r_i\cos\theta_i}{r^2} + \frac{q_i r_i^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) + \dots\right)$$

où θ_i est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{r_i}$. Faire un développement multipolaire d'une distribution quelconque de charges consiste à arrêter le développement limité à un ordre donné, dépendant du degré de précision souhaité. Dans le développement ci-dessus, le premier terme (ordre zéro ou *monopolaire*) correspond à assimiler la distribution à une charge totale placée en O. Cela peut être suffisant vu de très loin, si cette charge totale est non nulle. Dans le cas contraire (ou si l'on souhaite plus de précision) on obtient le deuxième terme qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

où le vecteur $\boxed{\vec{p}=\sum_i q_i\,\vec{r_i}}$ est le *moment dipolaire* associé à la distribution de charges, généralisation à plusieurs charges du moment dipolaire précédent. Lorsqu'on souhaite encore plus de précision (ou si $\vec{p}=\vec{0}$) il faut prendre en compte les termes d'ordre supérieur. Le terme suivant est la contribution *quadrupolaire*, décrivant la façon dont les charges positives et négatives se distribuent autour de leurs barycentres respectifs.